

Mikrocomputergesteuerter Fouriersynthese-Generator

Rudolf Nocker, Dieter Stark*

*Fourieranalyse, Fouriersynthese,
digitale Signalsynthese,
mikrocomputergesteuerter Generator.*

1 Systemtheoretische Grundlagen

Ein System S antwortet auf eine Eingangsfunktion (Anregung) $e(t)$ mit der Ausgangsfunktion (Antwort) $a(t)$:

$$S[e(t)] = a(t).$$

Bei vielen Problemstellungen in der Nachrichtentechnik kann man sich auf zeitinvariante, lineare Systeme beschränken. Ein System ist zeitinvariant, wenn für beliebige Zeitverschiebungen t_0 gilt: $S[e(t - t_0)] = a(t - t_0)$. Die Form der Ausgangsfunktion hängt dann nicht vom Zeitpunkt der Anregung ab. Ein System ist linear, wenn der Überlagerungssatz gilt (c_k Konstante):

$$S[e_k(t)] = a_k(t) \rightarrow S\left[\sum_k (c_k e_k(t))\right] = \sum_k (c_k a_k(t)).$$

Der Überlagerungssatz besagt, dass die Systemantwort auf eine Linearkombination von Teilanregungen durch Linearkombination der entsprechenden Teilantworten berechenbar ist. Diese Eigenschaft wird zur Berechnung der Systemantwort auf komplexe Eingangsfunktionen verwendet. Die Eingangsfunktion wird als Linearkombination von Teilfunktionen dargestellt, für welche die Systemantwort einfach berechenbar (oder bekannt) ist.

Auf eine sinusförmige Eingangsfunktion antwortet ein zeitinvariantes, lineares System mit einer sinusförmigen Ausgangsfunktion. Das System verändert nur Amplitude und Phasenwinkel. Andererseits sind (fast beliebige) periodische Funktionen $f(t)$ mit der Periodendauer T_0 als Linearkombination sinusförmiger Teilfunktionen

$$c_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_k)$$

mit ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz $f_0 = 1/T_0$, $\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0$ darstellbar:

$$f(t) = \sum_k c_k \cos(k \cdot \omega_0 t + \varphi_k).$$

Die Bestimmung der Amplituden c_k und Phasenwerte φ_k bei vorgegebener Funktion $f(t)$ bezeichnet man als Fourierana-

lyse (auch harmonische Analyse). Das Aufaddieren der Teil-schwingungen zur periodischen Gesamtfunktion bezeichnet man als Fouriersynthese (auch harmonische Synthese).

Für die experimentelle Durchführung der Fouriersynthese wurde ein mikrocomputergesteuerter Fouriersynthese-Generator entwickelt, bei dem die Amplituden c_k und Phasenwerte φ_k (für $k = 1, 2, \dots, 5$) digital einstellbar sind. Damit können im Lehrbetrieb die Ergebnisse einer vorhergehenden Fourieranalyse sofort experimentell überprüft werden. Nachfolgend werden zunächst die mathematischen Grundlagen der Fourieranalyse und Fouriersynthese zusammengefasst. An Beispielen wird die Approximation einer vorgegebenen Funktion durch ein trigonometrisches Polynom 5ten Grades behandelt. Anschließend wird das Hardware- und Softwarekonzept eines an der Fachhochschule Hannover im Rahmen mehrerer Diplomarbeiten [1] entwickelten Fouriersynthese-Generators beschrieben. Die Funktion wird mit mehreren Bildschirmfotos dokumentiert.

2 Mathematische Grundlagen

Eine auf der reellen Achse definierte, reellwertige Funktion $f(x)$ heisst periodisch, falls eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass für alle reellen x gilt:

$$f(x + L) = f(x).$$

Der kleinste Wert der Konstanten L heisst Periode von $f(x)$, die Funktion $f(x)$ heisst L -periodisch. Beispielsweise sind die trigonometrischen Funktionen $\cos(k \cdot x)$; $\sin(k \cdot x)$; $k = 1, 2, 3, \dots$ periodische Funktionen mit den Perioden $(2 \cdot \pi)/k$. Eine Konstante kann als Sonderfall einer periodischen Funktion mit beliebiger Periode aufgefasst werden. Die Linearkombination

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

heisst trigonometrisches Polynom n -ten Grades. Man setzt hier für $k = 0$ das Glied $a_0/2$ an, weil sich nachfolgend dann für alle k eine einheitliche Formel ergibt. Für $n \rightarrow \infty$ geht ein trigonometrisches Polynom in eine trigonometrische Reihe über, die sog. Fourier-Reihe.

Wird eine vorgegebene (2π) -periodische Funktion $f(x)$ durch ein trigonometrisches Polynom n -ten Grades $P_n(x)$ approximiert, so ergibt sich (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrat-Fläche, dem sog. quadratischen Mittel) die bestmögliche Approximation dann, wenn die Koeffizienten wie folgt gewählt werden [2, 3]:

* Prof. Dr.-Ing. Rudolf Nocker, Prof. Dipl.-Ing. Dieter Stark, Fachhochschule Hannover

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{(2\pi)} f(x) \cos(kx) dx; k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{(2\pi)} f(x) \sin(kx) dx; k = 0, 1, 2, \dots$$

Die Integration erfolgt über genau eine Periode $2 \cdot \pi$. Die Lage des Integrationsintervalls auf der x-Achse ist dabei beliebig, da auch der Integrand unter den gegebenen Voraussetzungen $(2 \cdot \pi)$ -periodisch ist. Die so gewählten Koeffizienten werden als Fourierkoeffizienten bezeichnet. In mathematischen Formelsammlungen sind die Fourierkoeffizienten für eine Vielzahl von Funktionen zusammengestellt [4, 5].

Aus den Formeln für die a_k , b_k ist zu ersehen, dass diese unabhängig vom Grad n sind. Bereits berechnete Koeffizienten bleiben beim Übergang zu trigonometrischen Polynomen höheren Grades erhalten. Damit die für $n \rightarrow \infty$ sich ergebende Fourier-Reihe punktweise gegen die vorgegebene Funktion $f(x)$ konvergiert, muss diese gewisse Bedingungen erfüllen. Hinreichend sind die Dirichletschen Bedingungen: Innerhalb einer Periode muss $f(x)$ sich in endlich viele Teilintervalle mit jeweils monotonem und stetigem Funktionsverlauf zerlegen lassen und darf nur endlich viele Sprungstellen aufweisen. Hierzu sei auf die mathematische Literatur verwiesen [2, 3]. Die in der Nachrichtentechnik auftretenden Funktionen erfüllen üblicherweise diese Bedingungen.

Es gilt dann (mit $f(x+0)$ = rechtsseitiger bzw. $f(x-0)$ = linksseitiger Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle x) für alle x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = [f(x+0) + f(x-0)]/2.$$

In Stetigkeitsstellen von $f(x)$ [dort ist $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$] ergibt sich danach der Funktionswert von $f(x)$, an Sprungstellen ist es der Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Grenzwert. An den Sprungstellen tritt als «Überschwingeffekt» das «Gibbsche Phänomen» [3] auf. Nachfolgend wird das trigonometrische Polynom in cos-Form benötigt:

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k \cos(kx + \varphi_k).$$

Wegen

$$c_k \cos(kx + \varphi_k) = c_k \cos(kx) \cos(\varphi_k) - c_k \sin(kx) \sin(\varphi_k)$$

folgt durch Vergleich der beiden Darstellungsformen:

$$a_k = c_k \cos(\varphi_k); b_k = -c_k \sin(\varphi_k); k = 1, 2, 3, \dots$$

Die Amplituden c_k und Phasenwerte φ_k können damit aus den Koeffizienten a_k , b_k berechnet werden:

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \varphi_k = -\arctan(b_k/a_k).$$

3 Beispiele

Der hier beschriebene Fouriersynthese-Generator ermöglicht die digitale Synthese beliebiger trigonometrischer Polynome 5ten Grades. In diesem Abschnitt werden die Fou-

rierreihen für einige Funktionen zusammengestellt und in die für die Eingabe der Amplituden- und Phasenwerte benötigte cos-Form umgeformt. Die Fourierreihen können nach den in Abschnitt 2 angegebenen Formeln berechnet oder aus mathematischen Formelsammlungen [4, 5] (ggf. sind zusätzliche Umformungen nötig) entnommen werden. Für die nachfolgenden Umformungen werden ausserdem folgende für beliebige z gültigen trigonometrischen Identitäten verwendet:

$$\sin(z) = \cos(z - \pi/2); -\cos(z) = \cos(z + \pi).$$

Für eine Rechteckpulsfunktion (*Bild 1a*) mit dem Tastverhältnis α (α = Impulsdauer/Periodendauer)

$$f_1(x) = 1, \text{ für } |x| \leq \alpha \cdot \pi; \\ 0, \text{ für } \alpha \cdot \pi < |x| < \pi$$

ergibt sich mit der Spaltfunktion $si(x) := \sin(x)/x$ folgende Fourierreihe:

$$f_1(x) = \alpha + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} si(k\pi\alpha) \cos(kx).$$

Damit ist $P_5(x)$ in cos-Form:

$$P_5(x) = \alpha + 2\alpha \sum_{k=1}^5 si(k\pi\alpha) \cos(kx).$$

Bild 1b zeigt die für $\alpha = 1/3$ sich durch Berechnung ergebende Approximationsfunktion (ohne Gleichanteil) im Intervall $[0, 2\pi[$.

Für die Sägezahnfunktion (*Bild 2a*)

$$f_2(x) = x, \text{ für } 0 \leq x < 2\pi$$

ergibt sich die Fourier-Reihe

$$f_2(x) = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)/k.$$

Damit ist $P_5(x)$ in cos-Form (unter Verwendung der angegebenen trigonometrischen Umformungen):

$$P_5(x) = \pi + 2 \sum_{k=1}^5 \cos(kx + \pi/2)/k.$$

Bild 2b zeigt die durch Berechnung sich ergebende Approximationsfunktion (ohne Gleichanteil) im Intervall $[0, 2\pi[$. Für die durch Einweggleichrichtung aus einer Sinusfunktion sich ergebende Sinuspulsfunktion (*Bild 3a*)

$$f_3(x) = \sin(x), \text{ für } 0 \leq x \leq \pi; \\ 0, \text{ für } \pi < x < 2\pi$$

ergibt sich die Fourierreihe

$$f_3(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2kx)/(4k^2 - 1).$$

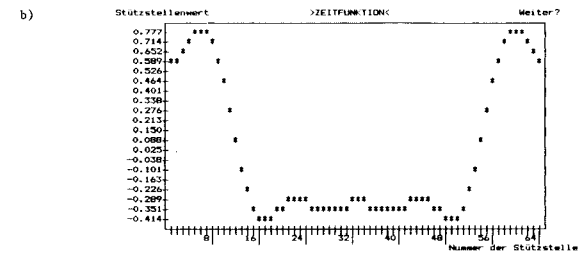
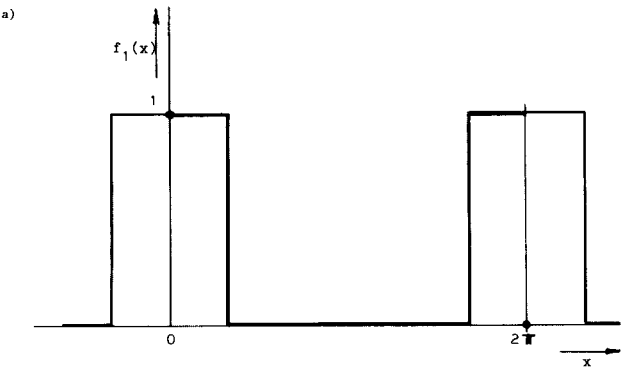


Bild 1a) Rechteckpulsfunktion mit Tastverhältnis α .
b) Approximationsfunktion (ohne Gleichanteil) der Rechteckfunktion mit Tastverhältnis $\alpha = \frac{1}{2}$ im Intervall $[0, 2 \cdot \pi]$.

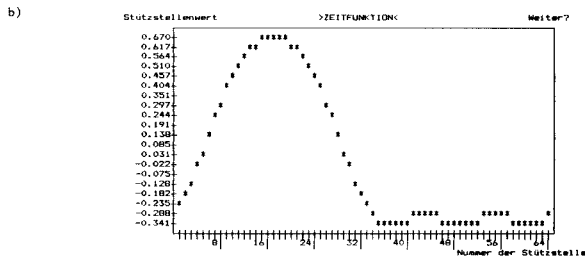
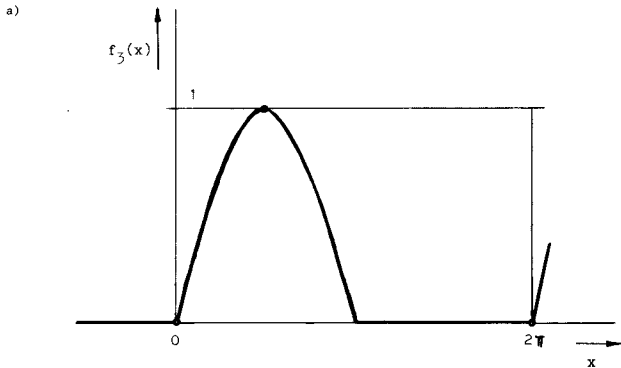


Bild 3a) Sinuspulsfunktion (Einweggleichrichtung einer Sinusfunktion).
b) Approximationsfunktion (ohne Gleichanteil) der Sinuspulsfunktion im Intervall $[0, 2 \cdot \pi]$.

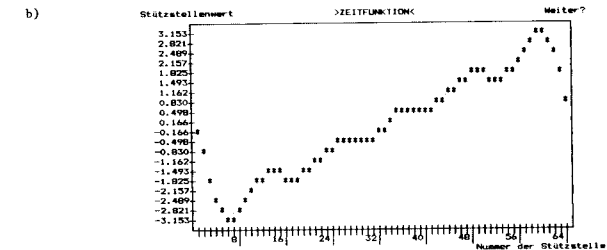
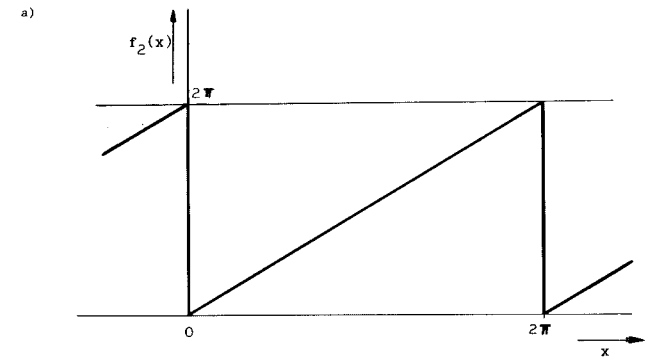


Bild 2a) Sägezahnfunktion
b) Approximationsfunktion (ohne Gleichanteil) der Sägezahnfunktion im Intervall $[0, 2 \cdot \pi]$.

Damit ist $P_5(x)$ in cos-Form:

$$P_5(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^2 \cos(2kx + \pi)/(4k^2 - 1).$$

Bild 3b zeigt die durch Berechnung sich ergebende Approximationsfunktion (ohne Gleichanteil) im Intervall $[0, 2 \cdot \pi]$.

4 Realisierung des Fouriersynthese-Generators

4.1 Funktionsprinzip

Bild 4 zeigt das Funktionsprinzip des Fouriersynthese-Generators. Aus einem Stützstellenspeicher wird eine das Nutzsignal repräsentierende Stützstellenfolge zyklisch mit geeigneter Taktfrequenz ausgelesen, DA-umgesetzt und durch das nachfolgende Interpolationsfilter geglättet. Die bei dieser Art der digitalen Erzeugung analoger Signale auftretenden Dimensionierungsprobleme wurden in [6] behandelt. Das Blockschaltbild des mikrocomputergesteuerten Fouriersynthese-Generators zeigt Bild 5. Das System besteht aus dem Mikrocomputer (mit ECB-Bus), dem eigentlichen Generator (mit speziellem Generatorbus) und dem Busadapter.

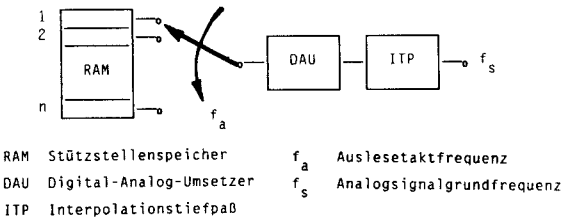


Bild 4 Funktionsprinzip des Fouriersynthese-Generators.

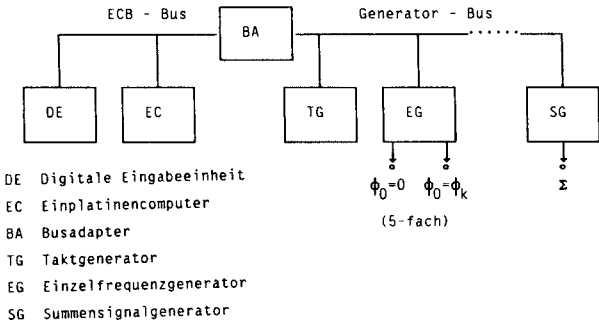


Bild 5 Blockschaltbild des mikrocomputergesteuerten Fouriersynthese-Generators.

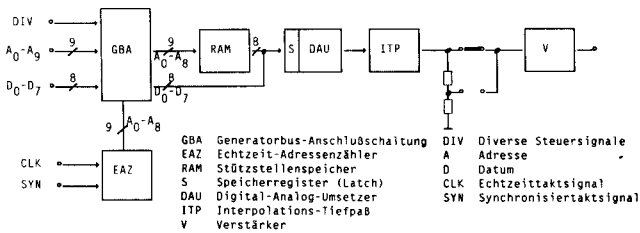


Bild 6 Funktionsblöcke der Summensignalkarte.

Der Generatorteil besteht aus der Taktgeneratorkarte, 5 Einzelfrequenzkarten für die Frequenzen $f_j = j \cdot 800 \text{ Hz}$; $j = 1, 2, \dots, 5$ und der Summensignalkarte. Jede Einzelfrequenzkarte liefert 2 Ausgangssignale, eines mit dem Nullphasenwinkel 0, eines mit dem Nullphasenwinkel ϕ_k . Die Summensignalkarte liefert das durch Fouriersynthese sich ergebende trigonometrische Polynom 5ten Grades (mit der Grundfrequenz $f_1 = 800 \text{ Hz}$).

Die Ausgabe der einzelnen Harmonischen durch die 5 Einzelfrequenzkarten hat im Lehrbetrieb den Vorteil, dass die 5 für die Fouriersynthese benutzten Harmonischen und das Summensignal gleichzeitig mit einem Mehrkanalosilloskop dargestellt werden können.

Der Mikrocomputer besteht aus einem Z80-Einplatinencomputer mit ECB-Bus und einer Eingabeeinheit. Über letztere werden in der Eingabephase im Dialog die Amplitudenwerte c_k (in der Form $U_{ss}/V = 2 \cdot \hat{U}/V = 0; 0,1; 0,2; \dots 9,9$) und Phasenwerte ϕ_k ($\phi_k/\text{grd} = 0, 5, \dots 355$) der 5 Harmonischen sowie ein Verstärkungsfaktor $V < 1$ für das Summensignal eingegeben.

Nach Eingabe der Werte werden die Stützstellenfolgen für die 5 Einzelfrequenzkarten und die Summensignalkarte berechnet und vom Mikrocomputer über den Busadapter in die Stützstellenspeicher der 6 Generatorkarten abgespeichert. Nachfolgend schaltet der Mikrocomputer auf «Generatorbetrieb» um. Mit dem von der Taktgeneratorkarte im Generatorteil vorgegebenen Echtzeittakt werden die Stützstellenfolgen ausgegeben.

Bei der nachfolgenden Hardware- und Softwarebeschreibung wird nur auf die Summensignalkarte eingegangen. Das Summensignal wird mit 360 Stützstellen pro Periode synthetisiert. Die Einzelfrequenzkarten sind (bis auf den zusätzlichen Ausgang) im wesentlichen gleichartig aufgebaut.

4.2 Hardware

Das Blockschaltbild (Bild 6) zeigt die Funktionsblöcke der Summensignalkarte. Der Stützstellenspeicher ist ein statisches $2k \times 8$ -bit-CMOS-RAM. Es wird ein 8-bit-DAU eingesetzt, der über den gesamten Aussteuerungsbereich eine Nichtlinearität von nur $\pm 1 \text{ LSB}$ aufweist.

Um Anstiegsverzerrungen des vom DAU ausgegebenen Treppenspannungssignals in den nachfolgenden Operationsverstärkern (des Interpolationsfilters) zu vermeiden, müssen diese eine ausreichende hohe «slew rate» (SR) aufweisen. Der erforderliche Mindestwert ergibt sich wie folgt: Maximale Spannungsanstiegsgeschwindigkeit liegt (in diesem Anwendungsfall) vor, wenn die 5te Harmonische (maximale Frequenz) mit maximaler Amplitude ausgegeben wird. Da die 5te Harmonische (bei insgesamt 360 Stützstellen der Summensignalperiode) mit 72 Stützstellen pro Periode dargestellt wird, ist die maximale Sprunghöhe der Treppenspannung am DAU-Ausgang mit $\sin(x) \approx x$ für $|x| \ll 1$ (beim Nulldurchgang der sinusförmigen Spannung):

$$\Delta u = \frac{U_{ss, \max}}{2} (\sin \frac{2\pi}{72} - \sin 0) \approx \frac{U_{ss, \max}}{2} \cdot \frac{2\pi}{72} \approx 0,44 V.$$

Die zeitliche Breite einer Treppenstufe ist

$$\Delta t = \frac{T_5}{72} = \frac{T_1}{5 \cdot 72} = \frac{1}{360 \cdot f_1} \approx 3,5 \mu s.$$

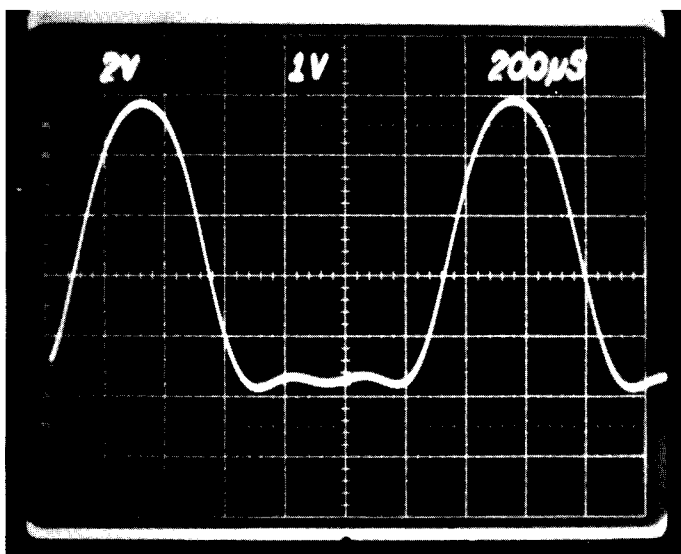
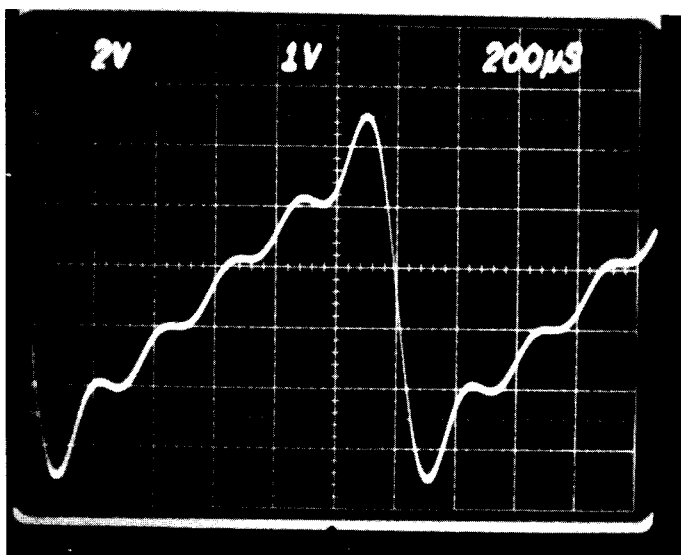
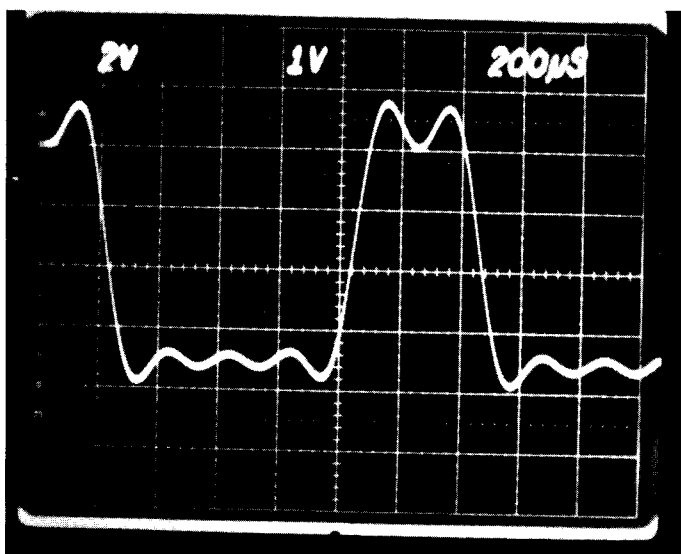


Bild 7 Oszilloskopdarstellungen zu Bild 1 bis 3.

Soll der Spannungsanstieg nicht mehr als den Zeitanteil p ($p = 0,05 \triangleq 5\%$) der Treppenbreite in Anspruch nehmen, so ist die maximale Spannungsanstiegsgeschwindigkeit

$$SR = \frac{\Delta u}{p \cdot \Delta t} = \frac{0,44 \text{ V}}{0,05 \cdot 3,5 \mu\text{s}} \approx 2,5 \text{ V}/\mu\text{s}.$$

Operationsverstärker mit höherer «slew rate» können eingesetzt werden.

Der dem DAU nachgeschaltete Tiefpass ist als aktives Filter 3ter Ordnung mit Einfach-Mitkopplung [7] realisiert. Der Amplituden- und Phasengang des Tiefpassfilters im Durchlassbereich sowie die (infolge der Treppenform erforderliche) $\sin(x)/x$ -Korrektur [6] werden bei der Berechnung der Stützstellenfolge durch den Mikrocomputer eingerechnet (Abschnitt 4.3). Wesentlich ist lediglich, dass durch eine möglichst hohe Sperrdämpfung unerwünschte Spektralkomponenten möglichst stark bedämpft werden. Diese Aufgabe wird bei gegebenem Filtergrad durch einen Tschebyscheff-Tiefpass optimal erfüllt. Im Durchlassbereich wird daraus durch das «vorgeschaltete Software-Filter» ein idealer Tiefpass (mit konstanter Dämpfung und frequenzproportionalem Phasengang).

Das dem Interpolationstiefpass nachgeschaltete Dämpfungsglied ermöglicht wahlweise eine Abschwächung des Ausgangssignals um 20 dB. Dadurch können auch Signale mit kleiner Ausgangsamplitude mit geringen Quantisierungsverzerrungen (hoher S/N-Abstand) ausgegeben werden.

Der nachfolgende Ausgangsverstärker liefert ein Ausgangssignal mit definiertem Ausgangswiderstand von 600Ω .

4.3 Software

Aufgabe des Mikrocomputers ist die Berechnung der Stützstellenfolgen für die 5 Einzelfrequenzkarten und die Summensignalkarte aus den digital über die Tastatur der Eingabeeinheit eingegebenen Amplitudenwerten c_k und Phasenwerten φ_k der 5 Harmonischen ($k = 1, 2, \dots, 5$). Nachfolgend wird die Berechnung des Summensignals

$$u_{\text{aus}}(t) = \sum_{k=1}^5 c_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t + \varphi_k)$$

beschrieben. Entsprechendes gilt für die Einzelsignale. Der Frequenzgang des dem DA-Umsetzer nachgeschalteten Interpolationstiefpasses ist:

$$\underline{H}(\omega) = \underline{U}_{\text{aus}}(\omega) / \underline{U}_{\text{ein}}(\omega) = H(\omega) \cdot e^{-jb(\omega)}$$

$H(\omega)$ Amplitudengang

$b(\omega)$ Phasengang

Mit $H(k \cdot \omega_0) = H_k$, $b(k \cdot \omega_0) = b_k$ als Amplituden- bzw. Phasengang für die k -te Harmonische $k \cdot \omega_0$ ist die erforderliche Eingangszeitfunktion $u_{\text{ein}}(t)$ des Interpolationstiefpasses:

$$\begin{aligned} u_{\text{ein}}(t) &= \sum_{k=1}^5 \frac{c_k}{H_k} \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t + \varphi_k + b_k) \\ &= \sum_{k=1}^5 A_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t + \psi_k), \end{aligned}$$

$A_k = c_k / H_k$ Gesamt-Amplitudenwert
 $\psi_k = \varphi_k + b_k$ Gesamt-Phasenwert

Für die Berechnung wird eine im EPROM abgespeicherte Cosinustabelle von 0° bis 90° und einer Genauigkeit von 16 bit verwendet. Auch die Werte für den Amplitudengang H_k und Phasengang b_k (für $k = 1, 2, \dots, 5$) sind als Tabelle abgespeichert. Für jede der 5 Harmonischen läuft dann unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften der cos-Funktion folgender Rechengang ab:

- Berechnung des Gesamt-Amplitudenwertes $A_k = c_k/H_k$.
- Multiplikation der Cosinustabelle mit dem Gesamt-Amplitudenwert A_k und Abspeicherung im Arbeitsspeicher (RAM). Im RAM steht als Ergebnis eine (amplitudenrichtige) Viertelperiode von 0° bis 90° der entsprechenden Harmonischen.
- Berechnung der Viertelperiode von 90° bis 180° durch rückwärtiges Durchlaufen der im RAM stehenden Viertelperiode und Vorzeichenumkehr durch Zweierkomplementbildung. Im RAM steht dann eine (amplitudenrichtige) Halbperiode.
- Berechnung der Halbperiode von 180° bis 360° durch rückwärtiges Durchlaufen der im RAM stehenden Halbperiode. Das Ergebnis ist eine Cosinustabelle von 0° bis 360° mit Amplitude A_k .

Anschliessend werden die 5 Harmonischen phasenrichtig (entsprechend den Gesamt-Phasenwerten $\psi_k = \varphi_k + b_k$) aufaddiert. Dabei ist durch entsprechende Skalierung der zu addierenden Werte eine (16-bit-)Bereichsüberschreitung zu vermeiden. Damit der Aussteuerungsbereich des 8-bit-DAU voll ausgenutzt wird, werden nach Normierung des Summensignals nur die 8 höchstwertigen bit verwendet und (bedingt durch den eingesetzten DAU) im Offset-Binary-Code abgespeichert. Nachdem alle Berechnungen durchgeführt und die Stützstellenfolgen in die Stützstellenspeicher eingelesen wurden, schaltet der Mikrocomputer auf «Generatorbetrieb» um.

5 Anwendungsbeispiele

Im Lehrbetrieb können Berechnungen auf dem Gebiet der Fourieranalyse und Fouriersynthese überprüft sowie Dämpfungs- und Phasenverzerrungen bei linearen Systemen unmittelbar demonstriert werden.

Die Beispiele zur Fouriersynthese aus Abschnitt 3 wurden am Fouriersynthese-Generator eingegeben. *Bild 7* zeigt die Oszilloskop-Darstellungen der synthetisierten Summensignale.

Literatur

- [1] Eike, A.; Hahne, M.; Klinger, B.; Meier, J.; Schmidt, H.-H.; Tegtmeier, A., Diplomarbeiten zum Fouriersynthese-Generator. Fachhochschule Hannover 1985–1987.
- [2] Arbenz, K.; Wohlhauser, A., Höhere Mathematik für Ingenieure, Oldenburg Verlag, München/Wien 1983.
- [3] Sauer, R., Ingenieur-Mathematik Band 2: Differentialgleichungen und Funktionentheorie, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokio 1968.
- [4] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A., Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt am Main 1980.
- [5] Papula, L., Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden 1986.
- [6] Nocker, R.; Stark, D. Rechnergestützte Signalsynthese, Design & Elektronik 1987, Heft 8, S. 111–115.
- [7] Schulze, J., Aktive RC-Filter 3. Ordnung. Elektronik H. 16/1981, S. 67–70; Heft 17/1981, S. 109–112.